Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare

**Olimpiada Naţională de Matematică 2005**

**Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti**

**5 martie 2005**

**CLASA A VII-a**

**Subiectul 1.** Arătaţi că pentru orice $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ suma

$$S_a = \overline{a}^{2005} + \overline{1a}^{2005} + \overline{2a}^{2005} + \cdots + \overline{9a}^{2005}$$

este divizibilă cu 10.

**Subiectul 2.** Se consideră triunghiul $ABC$ în care $M$ este mijlocul segmentului $AB$ iar $D$ este piciorul bisectoarei din $B$. Să se arate că dacă $MD \perp BD$, atunci $AB = 3BC$.

**Subiectul 3.** Notăm cu $m_a, m_g$ media aritmetică, respectiv media geometrică a numerelor reale strict pozitive $x$ şi $y$.

a) Dacă $m_a + m_g = y - x$, determinaţi valoarea raportului $x/y$.

b) Arătaţi că există o singură pereche de numere naturale nenule diferite $(x, y)$ pentru care $m_a + m_g = 40$.

**Subiectul 4.** În triunghiul $ABC$ se duce bisectoarea $CD$ unde $D \in AB$. Centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$ coincide cu centrul cercului înscris triunghiului $BCD$. Demonstraţi că $AC^2 = AD \cdot AB$.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt oblgatorii